

微积分第一回前七节教案

对象：数学基础约为高中一、二年级的文科学生。任务：从圆面积问题出发，建立集合、映射、函数与数列的认识，借助图像形成趋近直观，初步理解极限定义中的应答规则。

课时与目标

课次	建议时间	讲义范围	可观察的学习结果
1	90分钟	第一至二节	换算常见角；计算特殊角；写出多边形面积规则
2	90分钟	第三至四节	辨别映射与反例；计算函数值；认识数列是特殊函数
3	90分钟	第五至六节	画基本图像；区分点列与曲线；讨论无限酒店
4	90分钟	第七节	按误差选N；解释任意与所有；初识 ϵ 与 δ

每次90分钟可拆为两节45分钟。进度紧时，特殊角表、画图及酒店挑战题留作课后；极限定义不以背诵完整符号为唯一达标标准。

重点与准备

重点：对象与规则的抽象；图像的输入输出含义；“任意误差”和“所有后续项”。难点：角度与弧度混用、把多对一判成非函数、将无穷当作普通数、量词顺序颠倒。

准备：投影讲义和学案、普通计算器或手机计算器、直尺、双色笔。课前确认计算器可切换RAD；视频不能播放时，用房号卡片代替。学生两人一组，轮流解释，不要求公开报告成绩。

材料对应当前讲义第一至七节，不提前讲四则运算、两边夹定理或圆面积的最终证明。以下题号与学生学案一一对应。日期：2026年10月11日。

第一课 从圆到面积数列

目标：由“知道圆面积公式”转向“追问依据”；能换算五个常见角并推导单位圆内接正多边形面积。

时间	教学活动	检查点
0-10分钟	Q01-03 独立热身两人互讲	看平方、开方和三角比是否需要补讲
10-20分钟	Q04-05 提问圆面积与有限拼接	只提出问题，暂不宣布证明
20-40分钟	Q06-09 弧度、特殊角与计算器	教师演示DEG和RAD的不同结果
40-55分钟	Q10-11 拆分正六边形	顶角与半顶角分开标注
55-75分钟	Q12-15 推导一般面积规则	用正方形结果交叉核对
75-85分钟	Q16 倍角公式辨误与口答	先举反例，再写正确式
85-90分钟	离堂检查与反馈	说出输入、输出及n的范围

教师提问与支架

先问“ $\sin(\pi/3)$ 该是多少”，若学生直接把 π 当180，追问“ π 这个数等于180吗，还是两种角度单位相对应”。用半周角和一整周角帮助辨认。特殊角只要求从 30° 、 45° 、 60° 的三角形恢复，不从头讲完整三角函数理论。

推导时板书四步：顶角 $2\pi/n$ ；半角 π/n ；底 $2\sin(\pi/n)$ 、高 $\cos(\pi/n)$ ；乘 n 得到 A_n 。基础弱的学生先完成 $n=6$ ，再跟随一般 n 。不要引用扇形面积公式，否则会把圆面积结论提前用进推导。

反馈与作业

若约三分之一学生不会Q06或Q08，再留5分钟同伴讲解，以Q16的独立练习时间调剂。课后重做Q06、Q12、Q14；能用自己的话说出公式中每个量的含义即为本课达标。

第二课 从集合到函数

时间	教学活动	检查点
0–10分钟	用A4复习并完成Q17	能区分下标和面积值
10–25分钟	Q18–19 集合与数列	集合不计次序，数列保留位置
25–45分钟	Q20–22 名字词牌映射	每个输入有且仅有一个输出
45–55分钟	Q23 学生自拟反例	必须写清输入和输出集合
55–75分钟	Q24–27 函数计算与辨别	常函数、多对一、零作分母
75–85分钟	Q28–29 数列与函数	限制输入范围仍可得到函数
85–90分钟	两人互讲一个反例	用定义而不是图形印象判断

讲授安排

在黑板左右画两个集合，先不写公式。让学生为李白、杜甫、苏轼画箭头，然后删掉输出集合中的“子美”，请学生指出哪条规则失败。再用两首《如梦令》说明多对一完全允许。

函数是本课程中数集之间的映射。用“输入机器”讲 $f(3)$ ，要求学生说出代入过程；对 x^2 先比较 -2 和 2 ，专门检查学生是否把“输出唯一”误读成“一一对应”。

分层与评价

基本达标：Q18、Q21、Q24和Q27能解释原因。基础弱者可使用计算表，不先要求抽象表达式。挑战者在Q23中构造一个只因定义域改变就从非函数变成函数的例子。课后完成Q29，下一课将把规则画成图像。

第三课 图像与无穷

时间	教学活动	检查点
0–10分钟	核对Q24–25的数表	坐标写成输入在前
10–30分钟	Q30–33 画直线抛物线与点列	数列不随意连线，抛物线不画折线
30–45分钟	Q34–37 面积和 $\sin x/x$ 对应	横轴改变但同色点高度相同
45–55分钟	两人交换趋近猜想	数据与图像不充当证明
55–75分钟	酒店视频或房号演示 Q38–39	没有最后一间，不是最后一间很远
75–85分钟	Q40 无穷减无穷讨论	三种离开方式对应不同剩余
85–90分钟	Q41选做与离堂反思	保留疑问，进入极限定义

图像指导

先标出(0,1)和(0,0)，再描其他点。网格每格1单位；允许不够平滑，重点是坐标与形状。观察面积图时，先问左右横轴分别是什么，再让学生找 $n=6$ 对应的 $x=\pi/3$ ；不要只让学生说“趋近1”。

讨论边界

酒店的故事讨论无限集合； $\sin x/x$ 讨论变量变化。二者都提醒检查有限经验，却不是同一种运算。Q40仅用反例动摇“无穷像普通数”的直觉，不在这里宣布或推导任何极限运算法则。学生说“既然都无穷，就一样多所以相减为零”，请其实际写出留下的房号。

评价：Q32、Q35、Q38、Q40各邀请不同学生解释一句。课后画 $a_n=1/n$ 的前五个点，预想它离0有多近，为下一课误差游戏作准备。

第四课 师傅出题徒弟应答

时间	教学活动	检查点
0–10分钟	从1/n前五点复习趋近	有限图像不能包办无穷过程
10–25分钟	教师当师傅 Q42	严格小于与 $n>N$ 分别检查
25–45分钟	同桌轮换角色 Q43	师傅给误差，徒弟说明起点
45–60分钟	Q44–45 定义与量词	任意 ε 后选 N ，保证所有后续项
60–75分钟	Q46 证明 $1/n^2$ 趋于0	平方和取倒数的方向
75–85分钟	Q47函数极限，Q48选做	δ 控制输入， ε 控制输出
85–90分钟	自评与离堂小测	允许用口头语言解释定义

板书与话术

板书：师傅 $\varepsilon>0 \rightarrow$ 徒弟 $N \rightarrow$ 所有 $n>N$ 都满足 $|a_n-L|<\varepsilon$ 。先用 $\varepsilon=0.1$ ，再用0.01。学生找到一个更大的 N 也接受，追问“你怎么保证它后面每一项”，不追求最小 N 。

对 $1/n^2$ 可从 $1/n^2<\varepsilon$ 倒推 $n>1/\sqrt{\varepsilon}$ ，再选整数 $N\geq 1/\sqrt{\varepsilon}$ 。强调 N 依赖 ε ，且每次只需要一个有限整数。教师不以“做完无穷多次题”描述证明，而以“对任意题都有应答规则”收束。

函数极限只用 $f(x)=2x$ 、 x 趋于2体验：输出误差是输入误差的2倍，故 $\delta=\varepsilon/2$ 。带读定义中的 $0<|x-2|$ ，不展开点上值与极限关系的专题，不引入四则运算。

离堂小测与补救

口答四项： $\pi/3$ 对应几度；多对一是不是函数；数列图为何不随意连线； $1/n$ 在误差0.01下怎样选 N 。每项能给出答案及一句理由记2分，仅答对记1分，共8分。6分及以上进入后续内容；不足6分按薄弱点回做对应题，不用整套重做。

课后基础：重做Q42、Q44、Q46。提高：Q48。评价重在区分任意与所有、能给统一保证，不以符号书写速度评价学生。

学案参考答案 01 至 16

以下为学案对应题的参考答案。开放题接受满足条件的其他回答；优先追问理由。

01 12; 9; 3; 0.01。注意先平方再取倒数。

02 均为 60° ；后两角各 60° 。

03 $\sin \theta = 3/5$, $\cos \theta = 4/5$, $\tan \theta = 3/4$ 。对边、邻边随所选角改变。

04 $S = \pi r^2$ 。记忆给出结果；解释需说明面积为何恰为该值，不能把待证公式当作推导依据。

05 弧形边界并未因有限分割而变直；近似外形不能独自完成精确面积论证。允许学生画图说明。

06 $\pi, \pi/2, \pi/3, \pi/4, \pi/6$ 。可先用 180° 对应 π 按比例换算。

07 第一句错误， π 是约3.14的数；应说 π 弧度 $=180^\circ$ 。第二句正确。第三句错误，需RAD模式，或改输入 $\sin 60^\circ$ 。

08 正弦：0, $1/2$, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{3}/2$, 1；余弦：1, $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{2}/2$, $1/2$, 0。

09 $\sqrt{3}$ ；因为 $\tan = \sin/\cos$ ，而 $\pi/2$ 处 $\cos=0$ 。

10 $2\pi/n$ ；分别为 $2\pi/3, \pi/2, \pi/3$ 。不要把顶角与半顶角混淆。

11 一块为 $\sqrt{3}/4$ ；合计 $3\sqrt{3}/2 \approx 2.598076$ 。

12 π/n ； $\sin(\pi/n)$ ； $\cos(\pi/n)$ ； $\sin(\pi/n) \cos(\pi/n) = \frac{1}{2} \sin(2\pi/n)$ 。

13 $A_n = \frac{n}{2} \sin(2\pi/n)$, $n = 3, 4, 5, \dots$ 。

14 $3\sqrt{3}/4, 2, 3\sqrt{3}/2$ 。正方形面积=对角线平方/2=2，或边长 $\sqrt{2}$ 。

15 几何对象要求整数边数且至少3条边。代数表达式的可计算范围不等于几何模型的定义域。

16 左边 $\sqrt{3}/2$ ，右边1；正确倍角公式还含 $\cos t$ 。

学案参考答案 17 至 32

以下为学案对应题的参考答案。开放题接受满足条件的其他回答；优先追问理由。

17 4是边数/下标，2是面积值；交换不保留原对应关系。

18 $\in, \notin, \notin, \in$ 。最后一项是面积2，属于实数集。

19 集合相同，不计重复和次序；数列不同，下标位置重要。

20 可画三条箭头；每个输入都有输出，且每个输入只有一个输出。

21 前者是，多对一允许；后者不是从词牌集到作品集的映射，一个输入对应多首独立作品。不要混同输出为“作品集”的另一规则。

22 杜甫的输出子美不在指定输出集合中，规则未覆盖每个输入。

23 开放题。如本班学生 $\rightarrow$ 其学号；某人 $\rightarrow$ 他喜欢的所有单首歌曲，可能多值或无值。必须结合指定集合判断。

24 输出 $-3, -1, 1, 3, 5$ ；每次增加2。

25 $4, 1, 0, 1, 4$ ；不违反，要求每个输入输出唯一，不要求不同输入输出不同。

26 $7, 9, -1$ ；是输入3后的函数值。

27 ①③是；②在0无定义；④一个输入两个输出，不是函数。限制定义域可以修复②。

28 3、5、7、9；同一表达式，数列只取正整数输入， f 取全部实数。

29 例如定义域 $\mathbb{R}$ ， $h(x) = x - 2$ ， $0 \rightarrow -2$ 、 $1 \rightarrow -1$ 、 $2 \rightarrow 0$ 。答案不唯一。

30 分别经过 $(0,1)$ 、 $(0,0)$ ；一次函数为直线，二次函数需画平滑抛物线，五点只是定位。

31 $(1,3)$ 在； $(2,4)$ 不在， $x=2$ 对应5。

32 $(1,3)$ 、 $(2,5)$ 、 $(3,7)$ 、 $(4,9)$ ；不能，数列只在指定整数下标有值。

学案参考答案 33 至 48

以下为学案对应题的参考答案。开放题接受满足条件的其他回答；优先追问理由。

33 不是；从 $x=-2$ 到 -1 ，输出从4降到1；从0往右才递增。

34 猜测 π ；不能，有限数据和舍入值不能证明所有后续项的性质。

35 $x_6 = \pi/3$ ； $A_6/\pi = 3\sqrt{3}/(2\pi) = f(\pi/3)$ 。

36 x_n 从正侧趋近0；因为 $A_n/\pi = f(x_n)$ ，只是横坐标改变。

37 RAD；0.01是一个固定值，无限趋近描述过程，不能只检查单个很小的输入。

38 2、3、101；新客人住1号。 $n+1$ 规则是单射，无碰撞。

39 100号客人没有101号房。无限酒店对每个有限 n 都有 $n+1$ 号房。

40 分别为0、1、无穷多；不能把删去无限子集简单当作普通数的减法。酒店讨论集合人数，不直接作为极限运算法则。

41 原客 $n \rightarrow 2n$ ，新客 $k \rightarrow 2k-1$ ；两组不重叠且每个客人有房。

42 $n=10$ 不满足严格小于；11满足。 $N=10$ 可以，因为要求的是 $n > N$ ，不是 $n \geq N$ 。

43 对 $1/n$ 可取10、100、10000；对 $1/n^2$ 可取4、10、100。 N 不唯一，较大整数也对。

44 任意；存在；所有。顺序不可交换，不要求同一个 N 应付全部 ε 。

45 不够。须给出对任意 $n > N$ 成立的统一理由或不等式，而非有限次核对。

46 $1/\sqrt{\varepsilon}$ ； ε 。因 $n > N \geq 1/\sqrt{\varepsilon}$ 且都为正，平方、取倒数后得到严格不等式。

47 4；0.05。函数极限条件写作 $0 < |x-2| < 0.05$ 。

48 $\delta = \varepsilon/2$ ； $|2x-4| = 2|x-2| < 2\delta = \varepsilon$ 。